Izvod u pravcu. Parcijalni izvodi

Neka je $\vec{a} \neq 0$ fiksirani vektor iz $\mathbb{R}^n$. Znamo da je skup $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} = \vec{x_0} + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$ prava kroz tačku x_0 u pravcu vektora $\vec{a}$. Pri tome je $d(x_0 + ta, x_0) = |t|\|a\|$.

Definicija 1 *Neka je funkcija $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definisana na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, x_0 unutrašnja tačka skupa E, a $\vec{a} \neq 0$ zadati vektor. Graničnu vrednost*

$$f'_{\vec{a}}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t},$$

ukoliko postoji nazivamo **izvodom funkcije f u tački x_0 u pravcu vektora $\vec{a}$.**

Neka su zadovoljeni uslovi date definicije. Kako je x_0 unutrašnja tačka skupa E, postoji $\delta > 0$ tako da je $x_0 + \tau a \in E$ za svako $|\tau| < \delta$. Definišimo funkciju $\varphi : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ na sledeći način:

$$\varphi(\tau) = f(x_0 + \tau a) = f(x_1^0 + \tau a_1, \ldots + x_n^0 + \tau a_n),$$

gde je $x_0 = (x_1, \ldots, x_n^0)$ i $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Tada je

$$\begin{aligned} \varphi'(\tau) &= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(\tau + t) - \varphi(\tau)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + (\tau + t)a) - f(x_0 + \tau a)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f((x_0 + \tau a) + ta) - f(x_0 + \tau a)}{t} = f'_{\vec{a}}(x_0 + \tau a). \end{aligned}$$

Specijalno, $\varphi'(0) = f'_{\vec{a}}(x_0)$.

Teorema 1 *Neka su funkcije $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definisane na skupu $E \subset \mathbb{R}^n$, x_0 unutrašnja tačka skupa E. Ako postoje izvodi $f'_{\vec{a}}(x_0)$ i $g'_{\vec{a}}(x_0)$, tada postoje izvodi funkcija λf $(\lambda \in \mathbb{R})$, $f \pm g$, $f \cdot g$ u tački x_0 u pravcu vektora $\vec{a}$, pri čemu važe jednakosti:*

(i) $(\lambda f)'_{\vec{a}}(x_0) = \lambda \cdot f'_{\vec{a}}(x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

(ii) $(f \pm g)'_{\vec{a}}(x_0) = f'_{\vec{a}}(x_0) \pm g'_{\vec{a}}(x_0)$;

(iii) $(f \cdot g)'_{\vec{a}}(x_0) = f'_{\vec{a}}(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'_{\vec{a}}(x_0)$.

Ako je $g(x_0) \neq 0$, tada postoji izvod funkcije $\frac{f}{g}$ i važi:

(iv) $$\left(\frac{f}{g}\right)'_{\vec{a}}(x_0) = \frac{f'_{\vec{a}}(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'_{\vec{a}}(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Definicija 2 *Izvod funkcije f u pravcu vektora e_k, $1 \leq k \leq n$, gde su e_k elementi standardne baze prostora $\mathbb{R}^n$, nazivamo* **parcijalnim izvodom funkcije f po promenljivoj x_k** *i označavamo jednom od sledećih oznaka:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad f'_{x_k}, \quad D_{x_k} f.$$

Na taj način imamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} &= f'_{e_k}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_k)-f(x)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k+t,x_{k+1},\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_n)}{t}.\end{aligned}$$

Odavde vidimo da se parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ dobijaju kao izvod funkcije f po promenljivoj x_k, pri čemu se ostale promenljive smatraju konstantama.

Iz Teoreme 1 i definicije parcijalnih izvoda neposredno proizilaze sledeća svojstva parcijalnih izvoda:

(i) $\dfrac{\partial(\lambda f)(x)}{\partial x_k} = \lambda\cdot\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k},\quad \lambda\in\mathbb{R},\quad k=\overline{1,n};$

(ii) $\dfrac{\partial(f+g)(x)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}+\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_k},\quad k=\overline{1,n};$

(iii) $\dfrac{\partial(f\cdot g)(x)}{\partial x_k} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot g(x)+f(x)\cdot\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_k},\quad k=\overline{1,n}.$

Ako je $g(x)\neq 0$, tada je

(iv) $\dfrac{\partial\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)}{\partial x_k} = \dfrac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}g(x)-f(x)\dfrac{\partial g(x)}{\partial x_k}}{g^2(x)},\quad k=\overline{1,n}.$

Teorema 2 (Uopštenje Lagranžeove teoreme o srednjoj vrednosti funkcije) *Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu $E\subset\mathbb{R}^n$ i neka ona u svim tačkama tog skupa ima izvod u pravcu vektora $\vec{a}\neq 0$. Tada je*

$$f(x+ta)-f(x)=f'_{\vec{a}}(x+\theta ta)\cdot t,$$

za neko $\theta\in(0,1)$.

Teorema 3 *Ako postoji izvod $f'_{\vec{a}}$ funkcije f u tački x po pravcu $\vec{a}$, tada za svako $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ postoji $f'_{\lambda\vec{a}}$ i važi sledeća jednakost*

$$f'_{\lambda\vec{a}}(x)=\lambda\cdot f'_{\lambda\vec{a}}(x).$$

Teorema 4 *Neka je funkcija f definisana na skupu $E\subset\mathbb{R}^n$. Ako postoji izvod funkcije f u pravcu vektora $\vec{a}\neq 0$ u svakoj tački $z\in K(x,\delta)\subset E$, pri čemu je $f'_{\vec{a}}$ neprekidna funkcija u tački x i ako postoji $f'_{\vec{b}}(x)$, tada postoji izvod funkcije f u tački x po pravcu vektora $\vec{a}+\vec{b}$ i važi jednakost*

$$f'_{\vec{a}+\vec{b}}(x)=f'_{\vec{a}}(x)+f'_{\vec{b}}(x).$$

Ako je $f'_{\vec{b}}$ neprekidna funkcija u tački x, onda je i funkcija $f'_{\vec{a}+\vec{b}}$ neprekidna funkcija u tački x.

Posledica 1 *Neka je E otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $x \in E$. Ako funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ ima sve parcijalne izvode u nekoj okolini tačke x i ako su oni neprekidne funkcije u tački x, tada postoji izvod funkcije f u tački x po ma kom pravcu $\vec{a} \neq 0$ i važi jednakost*

$$f'_{\vec{a}}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \cdot a_k, \quad \vec{a} = (a_1, ..., a_n).$$

Definicija 3 *Vektor*

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)$$

nazivamo **izvodom funkcije** f **u tački** x *ili* **gradijentom funkcije** f **u tački** x *i označavamo jednim od simbola*

$$f'(x), \quad \mathrm{grad} f(x), \quad \nabla f(x).$$

♣ Iz egzistencije svih parcijalnih izvoda ne sledi neprekidnost funkcije u toj tački (vidi primer sa vežbi).